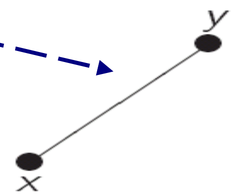
Diagramas de Hasse (representar c.p.o.)

Definição 1.1.11: *Seja* $(X, \leq)$ *um c.p.o..*
Dados $x, y \in X$ *dizemos que* y *cobre* x
se $x \leq y$ *e não existe* $z \in X$ *tal que* $x < z < y$.

Construção do diagrama de Hasse:

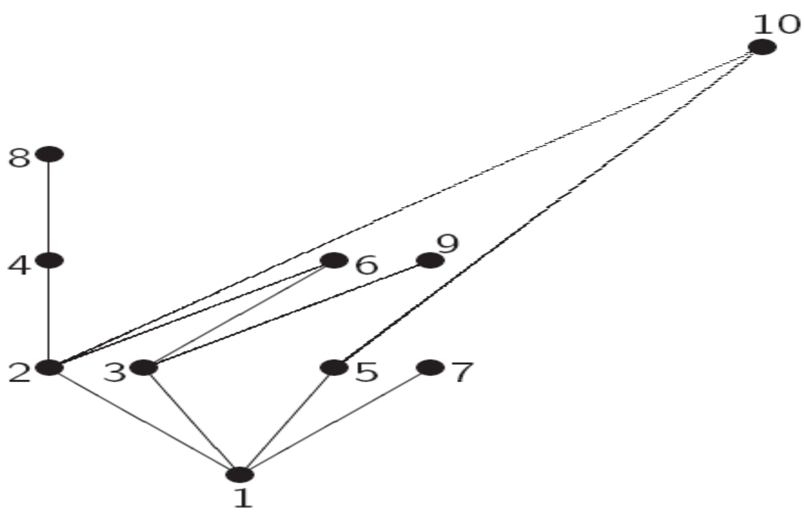
- Os elementos de *X* são pontos no diagrama
- Para $x, y \in X$, se *y* cobre *x* e são diferentes então coloca-se o ponto y "acima" do ponto do *x* (sem seta).



Exemplos:

1 $(\{1, 2, 3, 4\}, \leq)$, em que $\leq$ é a ordem usual em $\mathbb{N}$.

2
O c.p.o. $(\{1, 2, \ldots, 10\}, |)$, em que $|$ é relação de divisibilidade



Relação de Divisibilidade

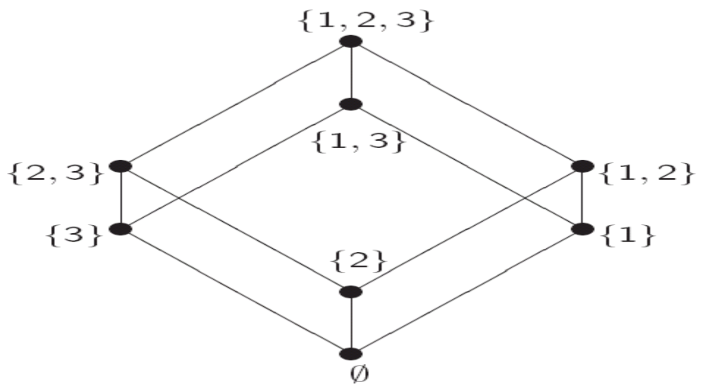
X={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}. Considere a relação | definida por: a, b $\in$ X

$$a|b \text{ (}a\text{ divide }b\text{)} \iff (\exists k \in \mathbb{N}) \ \ b = ak$$

b é múltiplo de a

3

O c.p.o. $(\mathcal{P}(\{1,\ 2,\ 3\}),\ \subseteq)$ possuí o seguinte diagrama de Hasse:



Definição 1.1.12:

Sejam $(X,\ \leq)$ *um c.p.o. e* $Y \subseteq X$.

1. *Dizemos que* $a \in X$ *é um* *minorante* *(resp.* *majorante*) *de* Y *se*

$$a \leq y \text{ (resp. } y \leq a\text{)}, \qquad \textit{para qualquer } y \in Y.$$

2. *Chamamos* *primeiro elemento* *de* Y *(ou* *mínimo* *de* Y*) a um elemento* $a \in Y$ *tal que*

$$a \leq y, \qquad \textit{para qualquer } y \in Y.$$

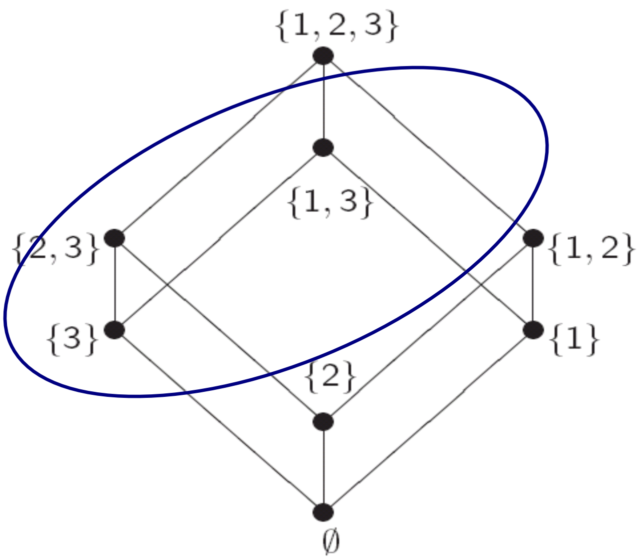
3. *Chamamos* *último elemento* *de* Y *(ou* *máximo* *de* Y*) a um elemento* $b \in Y$ *tal que*

$$y \leq b, \qquad \textit{para qualquer } y \in Y.$$

4. *Dizemos que $a \in Y$ é um elemento minimal (resp. maximal) de Y se não existe $b \in Y$ tal que $b < a$ (resp. $a < b$).*

5. *Dizemos que $a \in X$ é o ínfimo (resp. supremo) de Y se a é o maior dos minorantes(resp. menor dos majorantes).*

Exemplo: Considere o c.p.o. $(\mathcal{P}(\{1,\ 2,\ 3\}),\ \subseteq)$



$$X = P(\{1,2,3\})$$

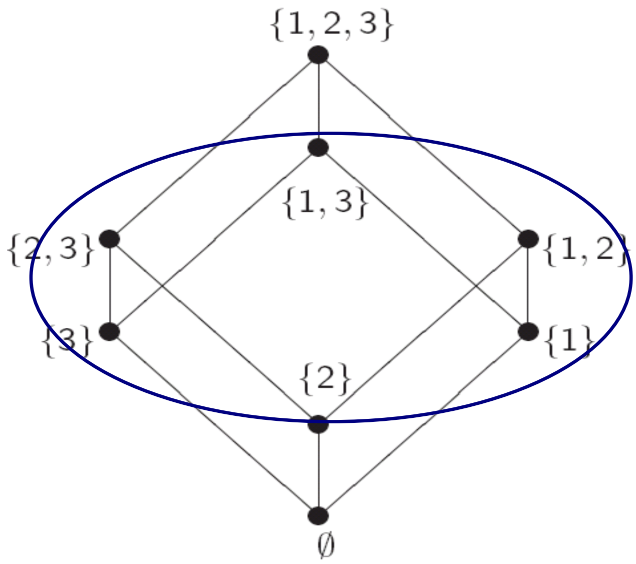
$$Y = \{\{3\},\{1,3\},\{2,3\}\}$$

$\{1,2,3\}$ é majorante de Y

$\emptyset$, $\{3\}$ são minorantes de Y

Não existe o máximo de Y

$\{3\}$ é o mínimo de Y



$$Y = \{\{3\},\{2,3\},\{1\},\{1,2\}\}$$

$\{1,2,3\}$ é majorante de Y

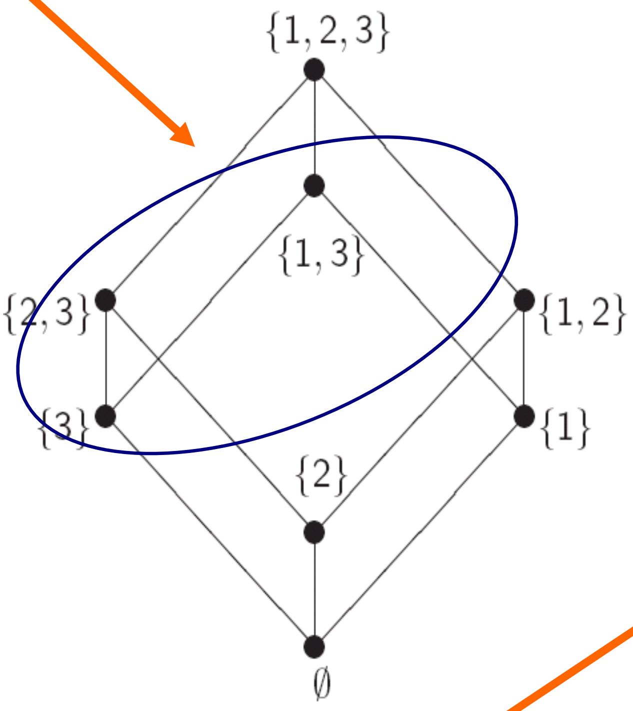
$\emptyset$ é minorante de Y

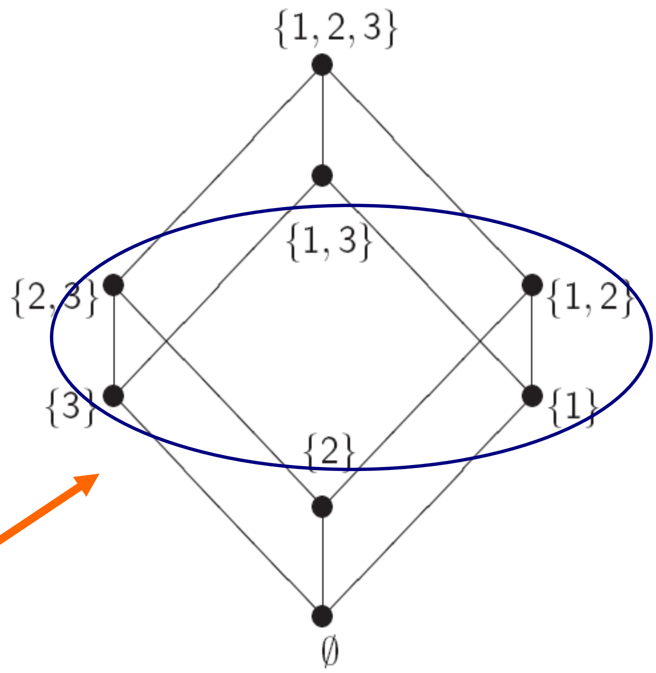
Não existe o máximo de Y

Não existe o mínimo de Y

$\{2,3\},\ \{1,3\}$ são elem. maximais de Y

$\{3\}$ é elem. minimais de Y





$\{2,3\},\ \{1,2\}$ são elem. maximais de Y

$\{3\},\ \{1\}$ são elem. minimais de Y

Definição 1.1.13:
Um c.p.o. $(X, \leq)$ diz-se um conjunto bem ordenado (e $\leq$ uma boa ordem) se qualquer subconjunto não vazio de X possuí primeiro elemento.

Axioma da boa ordenação

O par $(\mathbb{N}, \leq)$ em que $\leq$ denota a ordem usual, é um conjunto bem ordenado.
